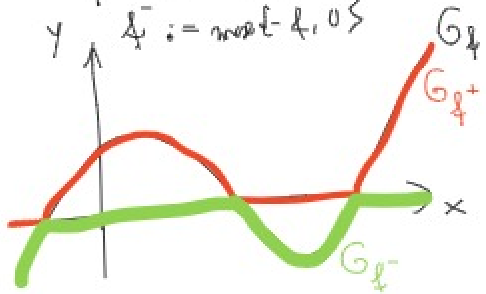
$f^+ := \max\{f, 0\}$

$f^- := \max\{-f, 0\}$



f mesurable

$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (On dit f intégrable) $:\Leftrightarrow$

$\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$

f mesurable

$\int_\Omega f \, d\mu$ existe $:\Leftrightarrow$ $\in \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$

$\int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty$ ou $\int_\Omega f^- \, d\mu < \infty$

Exemple: $\int_{\mathbb{R}} e^x \, d\lambda(x)$ existe? $= \infty$

(Oui, parce que $\int_\Omega (e^x)^- \, dx = 0 < \infty$

$e^x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$?

$\int_{\mathbb{R}} |e^x| \, d\lambda(x) = +\infty \Rightarrow e^x \notin \mathcal{L}^1$

EXERCICE 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbb{1}_{[a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. $(f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. $(g \in \mathcal{L}^1)$.*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.*

À montrer : $f \notin \mathcal{L}^1$, ça veut dire

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda \overset{!}{=} +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^x + x^3 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}|}_{} \, d\lambda(x)$$

$|e^x + x^3| \geq |x^3| \; \forall x \in \mathbb{R}$

$|e^{-0,1} + (-0,1)^3| \not\geq |(-0,1)^3|$

Monotonie de l'intégral

$$\boxed{f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu}$$

$e^x + x^3 \geq e^x$ si $x \geq 0$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} |\underbrace{\overbrace{e^x + x^3 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}^{\geq 0}}_{\geq e^x}| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \, d\lambda(x)$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^x \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} e^x \cdot \mathbb{1}_{[0,n]} \, d\lambda(x)$$

Beppo-Lévi $\to$ $$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot \mathbb{1}_{[0,n]} \, d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^x \, d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^x \, dx = \lim_{n\to\infty} [e^x]_0^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^x - e^0 =$$

$$= +\infty - 1 = +\infty$$ ✓

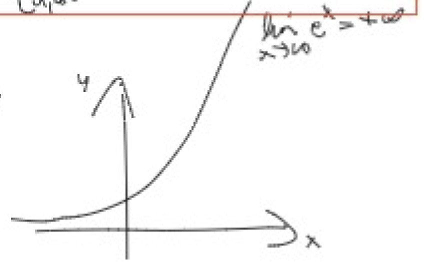
Theorem

(continue)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f \, dx$$



$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$

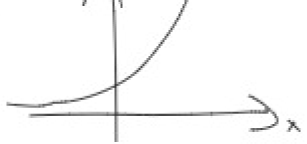
EXERCICE 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbb{1}_{[a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue.*

lim

$\to +\infty - 1 = +\infty$ ✓



EXERCICE 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{[a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.*

3) À montrer :

$$\int_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda < \infty$$

Notation

$$\int_A f\, d\mu := \int_\Omega f \cdot \mathbf{1}_A\, d\mu$$

Δ-inégalité

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Montonie de l'intégral

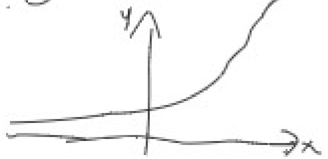
$$\int f+g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda \le \int_{\mathbb{R}} [e^x + x^3 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}| \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}\, d\lambda \le \int_{[a,b]} |e^x + x^3 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}|\, d\lambda \le \int_{[a,b]} e^x + \underbrace{|x^3| \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}_{\le \mathbf{1}_{\mathbb{R}} = 1}}_{\le \underbrace{\max\{|a|,|b|\}^3}_{=: C}}\, d\lambda(x) = \int_{[a,b]} \underbrace{e^x}_{\le e^b} + C\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (e^b + C) \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}\, d\lambda(x) =$$

$\le$

$< \infty$

e^x est croissante



$$= (e^b + C) \cdot \underbrace{\lambda([a,b])}_{= b-a}$$

$$= (e^b + C) \cdot (b-a) < \underline{\underline{\infty}}$$

fonctionne étagée

$$\int \sum_i \delta_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}\, d\mu :=$$

$$= \sum_i \delta_i \cdot \mu(A_i)$$

EXERCICE 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.*

Théorem

$h = g$ λ presque-partout

1) $h \in \mathcal{L}^1 \iff g \in \mathcal{L}^1$

2) h mésurable $\iff$ g mésurable

3) $\int h\, d\mu$ exist $\iff$ $\int g\, d\mu$ exist, et

dans ce cas $\int h\, d\mu = \int g\, d\mu$

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda =$$

$$g(x) = (e^x + x^3 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}) \cdot \mathbb{1}_{]a,b]} \overset{\lambda\text{ p.p.}}{=} (e^x + x^3)\mathbb{1}_{]a,b]} = h(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\lambda(x) =$$

$$\lambda(\{h \neq g\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq g(x)\}) = \lambda(\mathbb{Q}\setminus\{0\}) = 0$$

$$\lambda(\mathbb{Q}\setminus\{0\}) = \lambda(\{q_1\} \dot\cup \{q_2\} \dot\cup \ldots\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\lambda(\{q_i\})}_{=0} = 0$$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

$$h(0) = g(0) = e^0 = 1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (e^x + x^3) \mathbb{1}_{]a,b]}\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(e^x + x^3)}_{\text{continue}} \mathbb{1}_{[a,b]}\, d\lambda(x)$$

continue $\Rightarrow$

$$= \int_a^b e^x + x^3\, dx = \left[e^x + \frac{x^4}{4} \right]_a^b$$

$$= e^b + \frac{b^4}{4} - \left(e^a + \frac{a^4}{4}\right) ✓$$

Theorem

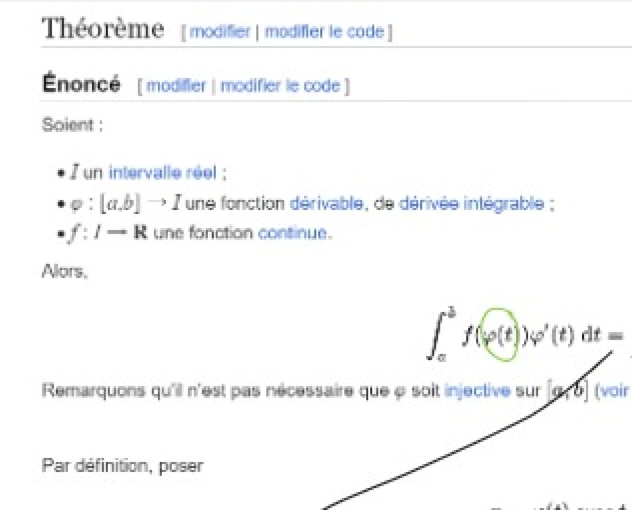
(continue)

$\Downarrow$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f\, dx$$



Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, \mathrm{d}t =$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir

Par définition, poser

ime)

$\Downarrow$

nn-intégables

) et

$f\,dx$

a

$$= \int \underbrace{(e^x+x^3)}_{\text{continue} \Rightarrow} \mathbb{1}_{[a,b]}\, d\delta(x)$$

R

$$= \int_a^b e^x + x^3 \; dx = \left[e^x + \frac{x^4}{4} \right]_a^b$$

$$= e^b + \frac{b^4}{4} - \left(e^a + \frac{a^4}{4}\right) \checkmark$$

Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

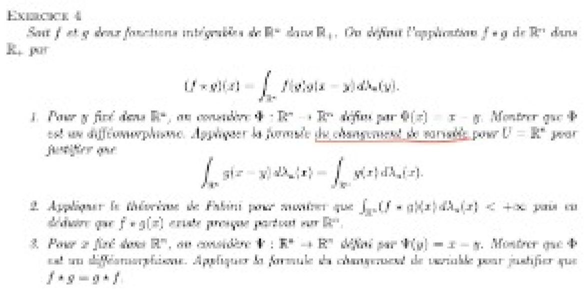
Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir infra).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a,b],$$

s'appelle faire un **changement de variable**.

$$\int_0^5 (\overset{\varphi(x)}{x^3+5})^{100} \cdot \underset{}{\overset{\varphi'(x)}{3 \cdot x^2}} \; dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(5)} x^{100}\, dx = \int_5^{130} x^{100}\, dx = \left[\frac{x^{101}}{101} \right]_5^{130} = \dots$$



EXERCICE 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f * g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f*g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f*g = g*f$.*

$$-(a-b+d) = -a+b-d$$

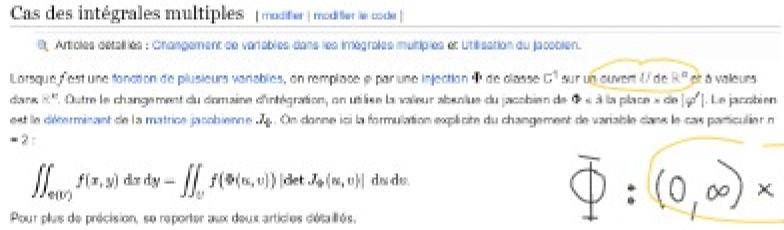
$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$f(\Phi(r,\varphi)) = f\left(\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{-((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2)}$$

$$= e^{-(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} =$$

$$= e^{-r^2}$$



Cas des intégrales multiples [modifier | modifier le code]

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace φ par une injection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ. On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_U f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

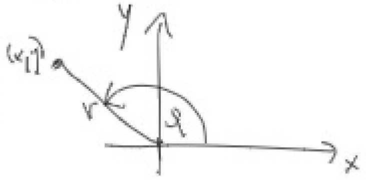
$$\delta^2([0,\infty[) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\Phi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[$$

$$(r, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi = \Phi_1 \\ r \cdot \sin\varphi = \Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{f(x,y)} \underbrace{d\delta^2(x,y)}_{dV} = \iint_{\underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty)}_{=\Phi(U)}} f(x,y)\, d\delta^2(x,y)$$



$$\det(J\Phi) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r\cdot\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi$$

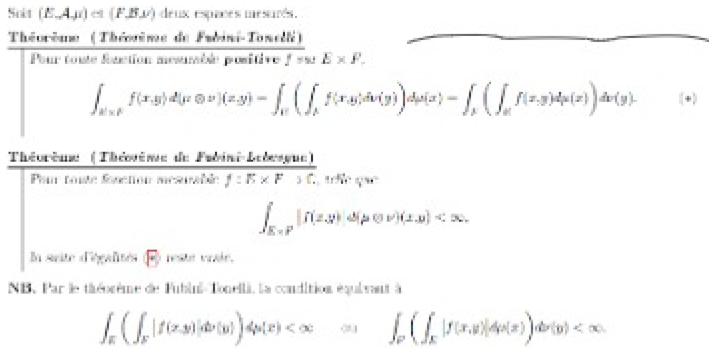
$$= r\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= r \cdot 1 = \underline{\underline{r}}$$

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$$

$$= \iint_{\underbrace{(0,\infty)\times(0,2\pi)}_{=U}} f(\Phi(r,\varphi)) \quad \underset{|\det J\Phi|}{\overset{}{r}} \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$= \iint_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} \cdot r \; d\delta^2(r,\varphi) =$$



Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (*Théorème de Fubini-Tonelli*)

Pour toute fonction mesurable **positive** f sur $E \times F$,

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \left(\int_F f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y). \qquad (*)$$

Théorème (*Théorème de Fubini-Lebesgue*)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \to \mathbb{C}$, telle que

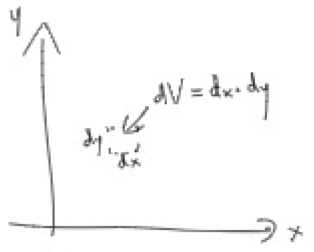
$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty,$$

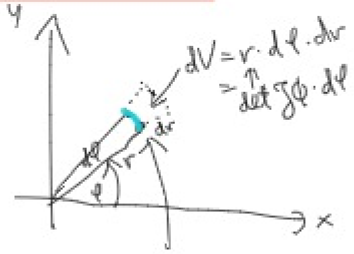
la suite d'égalités $(*)$ reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

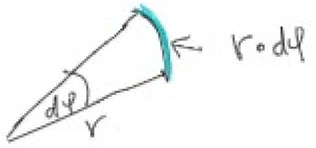
$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)|\,d\mu(x)\right) d\nu(y) < \infty.$$

$$= \int_{(0,2\pi)} \int_{(0,\infty)} e^{-r^2} \cdot r \; d\delta(r) \; d\delta(\varphi)$$





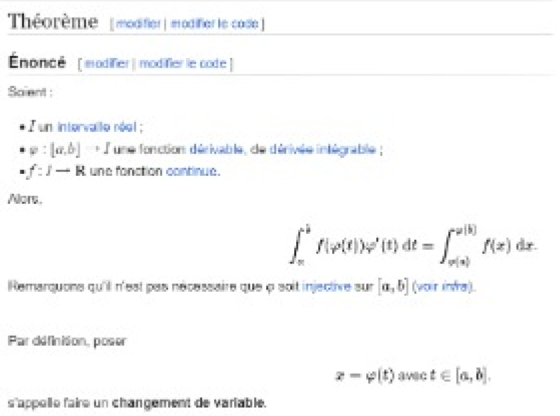
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \underbrace{d\delta^2(x,y)}_{dV = dx \cdot dy} =$$



$$= \underbrace{\int_{(0,\infty)} e^{-r^2} \cdot r \; d\delta(r)}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_{(0,2\pi)} 1 \cdot d\delta(\varphi)}_{= \int_{[0,2\pi]} 1 \; d\delta(\varphi) = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi}$$

$$= [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$



Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors,

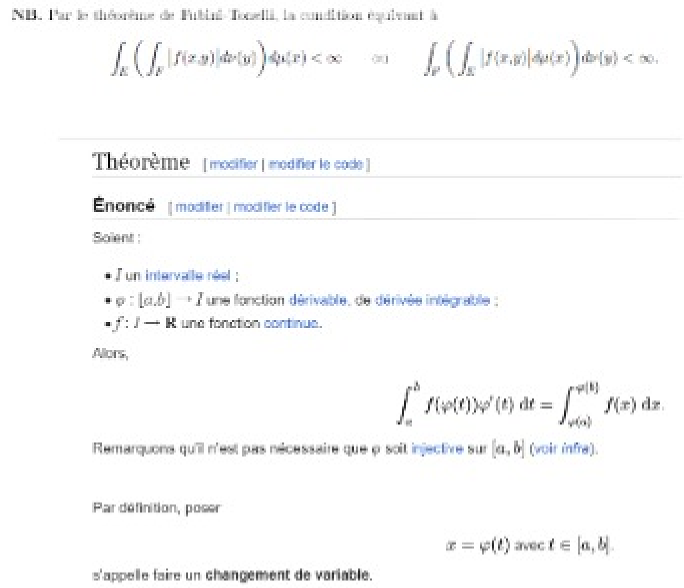
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir infra).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a,b],$$

s'appelle faire un **changement de variable**.



NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E\left(\int_F |f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_F\left(\int_E |f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty.$$

Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir infra).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a,b].$$

s'appelle faire un **changement de variable**.

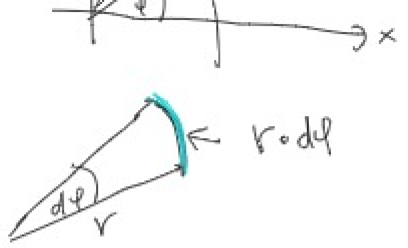
$$= \underbrace{\int_{(0,\infty)} e^{-r}\cdot r\,d\lambda(r)}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{\int_{(0,2\pi)}}_{} = \int_{[0,2\pi]} 1\,d\lambda(\varphi) = \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi$$

$$= [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \underbrace{d\lambda^2(x,y)}_{dV = dx\cdot dy} =$$

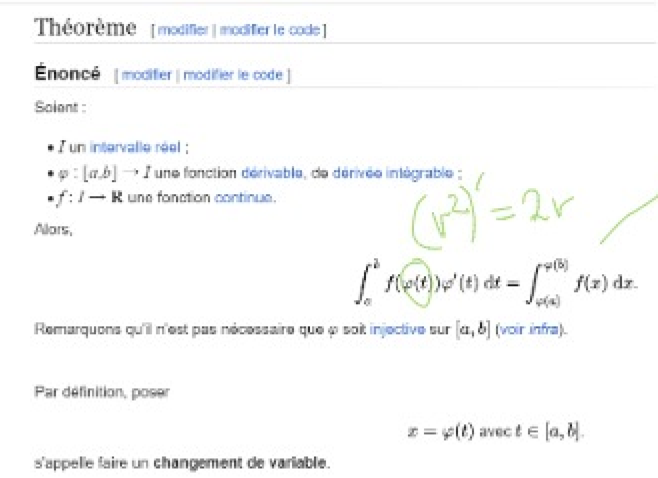


$$\int_{(0,\infty)} e^{-r^2}\cdot r\;\;d\lambda(r) = \int_{[0,\infty)} e^{-r^2}\cdot r\;d\lambda(r)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} e^{-r^2}\cdot r\cdot \mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda(r) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-r^2}\cdot r\cdot \mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda(r) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-r^2}\cdot r\,d\lambda(r)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^n e^{-r^2}\cdot 2r\,dr$$



Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir infra).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a,b].$$

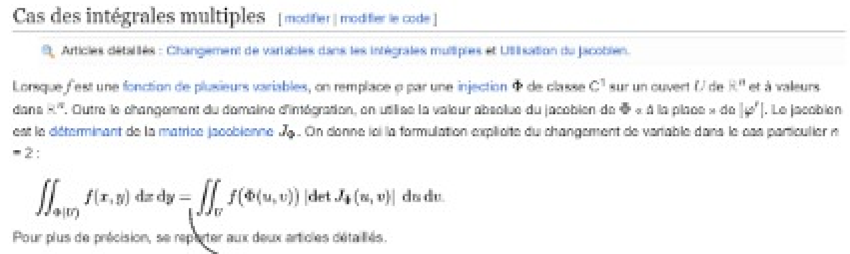
s'appelle faire un **changement de variable**.

$$(r^2)' = 2r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot \int_0^{n^2} e^{-x}\;\;dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left[-e^{-x}\right]_0^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(-\underbrace{e^{-n^2}}_{0} - (-e^{-0})\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



Cas des intégrales multiples [modifier | modifier le code]

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

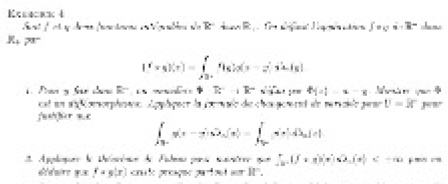
Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace φ par une injection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ. On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_U f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

$$2)\;\int_{\mathbb{R}^n \overset{"}{=} \Phi(\mathbb{R}^n)} g(\overbrace{x-y}^{\Phi(x)})\,d\lambda_n(x) = \int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} g(\Phi(x))\cdot\underbrace{|\det J\Phi|}_{=1}\,d\lambda_n(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\;\;d\lambda^n(x)$$



y fixée.

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(x) = x - y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "-y", "\Phi"'] & x-y \arrow[l, bend left, "+y", "\Phi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\Phi^{-1}(x) = x + y$$

$$\det J\Phi = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \det E_n = 1$$